DOI:10.13546/j.cnki.tjyjc.2021.17.010

高次趋势单位根检验中联合F统计量研究

左秀霞

（江苏大学 财经学院，江苏 镇江 212013）

摘 要：文章对带高次趋势项的DF单位根检验中，联合F检验统计量在小样本和有限样本下的临界值进行仿真，比较了其与现有研究结果的区别与联系，并对其随样本容量和趋势项阶数增加的变化特征进行了探讨。结果显示，仿真得到的临界值与现有研究非常相似。相比其渐近分布而言，统计量在小样本和有限样本下的分布更加分散，并且样本容量越小，分散程度越严重。趋势项阶数越大，统计量的分布越向右侧平移，但当样本容量大于30时，右侧临界值向右平移的幅度逐步减小。

关键词：高次趋势；单位根检验；F统计量；临界值

中图分类号：F224.0 文献标识码：A 文章编号：1002-6487(2021)17-0051-05

0 引言

时间序列的平稳性分析与检验是现代计量经济学和时间序列分析的重要内容，检验序列平稳性的方法有很多，其中ADF和DF单位根检验的应用最广[1,2]。

ADF和DF单位根检验既包括对一阶滞后项系数的单位根检验，也包括对确定部分与一阶滞后项系数的联合检验。Dickey和Fuller(1981)[2]、Hamilton(1994)[3]研究了ADF和DF单位根检验中联合F检验的渐近理论。张凌翔和张晓峒(2009)[4]则研究了DF单位根检验中的联合Wald统计量的渐近理论。

实际经济数据样本容量是有限的，于是国内外学者还研究了小样本和有限样本下DF单位根检验中的联合F检验，Dickey和Fuller(1981)[2]给出了有限样本下联合F统计量的临界值。朱永军(2006)[5]、张凌翔和张晓峒(2009)[4]分别仿真得到了DF检验中的F统计量和Wald统计量的小样本和有限样本临界值。

传统单位根检验并没有考虑宏观经济和企业总量指标序列的高次趋势问题，从而会损失检验的势[6]。在实际研究中，多是先退化序列趋势，再对退势序列采用传统检验进行分析[7-9]。然而，退化趋势会改变检验统计量的原有分布和临界值[10]。于是，有学者将平稳性或单位根检验扩展到了高次趋势情形，Busetti和Taylor(2003)[11]在高次趋势情形下研究了结构突变的KPSS等平稳性检验；左秀霞(2019)[12]研究了高次趋势ADF单位根检验、联合F检验等渐近理论。这样就不用退化趋势，而是可以直接用高次趋势的单位根检验进行分析。那么，在小样本和有限样本下，高次趋势单位根检验中联合F检验的临界值是否发生变化？随着样本容量和趋势项阶数的变化，检验的分布又

基金项目：全国统计科学研究项目(2020LY109)；江苏省社科应用研究精品工程高质量发展综合考核专项课题(21SKC-17)

作者简介：左秀霞(1981—)，女，山东滨州人，博士，副教授，研究方向：数量经济学。

Study on Measure Method of Spatial Spillover Effect From the Perspective of Spatial Econometrics

Zhou Yulong[1], Sun Xiangwei[2]

(1.College of Economic and Social Development, Nankai University, Tianjin 300071, China;
2.School of Business, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: This paper reviews, summarizes and evaluates the economic methods of measuring spatial spillover effect, and finds that as a new branch of econometrics, spatial econometrics is relatively systematic and comprehensive in measuring and explaining spatial spillover effect, which can effectively improve the effect of empirical researches. However, in terms of measuring (or explaining) the spatial effects of economic units, the existing researches fail to fully understand the spatial mechanism in spatial econometrics. Therefore, it is necessary to further expound the mechanism in which spatial econometrics explains spatial spillover effect from the perspective of theory and method, to find out the areas to be improved and point out the direction of using spatial econometrics to measure spatial spillover effect.

Key words: spatial spillover effect; spatial econometrics; method study

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

有哪些变动规律？这是本文要研究的问题。

本文首先介绍了高次趋势DF单位根检验中联合F检验的相关理论；然后，在含三次、二次、线性趋势项和截距项时，仿真得到联合F检验的小样本和有限样本临界值，并与现有结果进行比较；最后，分析了其随样本容量和趋势项阶数变化的变动特征。

1 高次趋势DF单位根检验中联合F检验的理论

设定带 $k+1$ 次（$k=-1$、0、1、2、…）趋势项的DF单位根检验的检验式为[12]：

$$\Delta y_t = c_0 + c_1 t + \cdots + c_k t^k + b t^{k+1} + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1}$$

式（1）中联合F检验的原假设为 $H_0: b=0, \gamma=0$（或 $H_0: R_1\beta=(0,0)'$，其中，$R_1=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{2\times((k+1)+2)}$，备择假设为 $H_1: b\neq 0$ *or* $\gamma<0$。联合检验的F统计量及其在 H_0 下的渐近分布函数为：

$$F=\frac{\left[R_1\hat{\beta}-(0,0)\right]'\left[R_1\left(\sum_{t=1}^{T}x_t x_t'\right)^{-1}R_1'\right]^{-1}\left[R_1\hat{\beta}-(0,0)\right]/2}{s_T^2}$$

$$\xrightarrow{L}\frac{\left(V_1^{-1}h_1\right)'R_1'\left[R_1V_1^{-1}R_1'\right]^{-1}R_1\left(V_1^{-1}h_1\right)/2}{\sigma^2} \tag{2}$$

其中，$\hat{\beta}=(\hat{c}_0,\hat{c}_1,\cdots,\hat{c}_k,\hat{b},\hat{\gamma})'$ 是式（1）中参数向量 $\beta=(c_0,c_1,\cdots,c_k,b,\gamma)'$ 的OLS估计量（在 H_0 下有 $\beta=(c_0,c_1,\cdots,c_k,0,0)'$），$x_t=(1,t,\cdots,t^{k+1},y_{t-1})'$，$s_T^2=\frac{1}{T-[(k+1)+2]}\sum_{t=1}^{T}(\Delta y_t-\hat{\beta}'x_t)^2$ 是误差项方差 σ^2 的OLS估计，并有 $s_T^2\xrightarrow{p}\sigma^2$。并且，$V_1=\begin{pmatrix}\int_0^1 F(s)F(s)'\mathrm{d}s & \sigma\int_0^1 F(s)W(s)\mathrm{d}s\\ \sigma\int_0^1 W(s)F(s)'\mathrm{d}s & \sigma^2\int_0^1 W(s)^2\mathrm{d}s\end{pmatrix}$，$h_1\sim\begin{pmatrix}\sigma\int_0^1 F(s)\mathrm{d}W(s)\\ \sigma^2\int_0^1 W(s)\mathrm{d}W(s)\end{pmatrix}$，$F(s)=(1,s,s^2,\cdots,s^{k+1})'$，$W(r)$ 是布朗运动。

2 高次趋势DF单位根检验中联合F检验的临界值仿真

2.1 F检验临界值的仿真

本文考虑了带三次、二次、线性趋势项和截距项的四种类型的单位根检验，以方便与传统单位根检验中联合F检验进行比较分析。样本容量T分别取10、15、20、25、30、35、40、45、50、55、100、200、250、300和500。设数据生成过程为 $y_t=y_{t-1}+\varepsilon_t, y_0=0, \varepsilon_t\sim IIN(0,1)$，四种类型的DF单位根检验式分别为 $\Delta y_t=c_0+c_1t+c_2t^2+bt^3+\gamma y_{t-1}+\varepsilon_t$，$\Delta y_t=c_0+c_1t+bt^2+\gamma y_{t-1}+\varepsilon_t$，$\Delta y_t=c_0+bt+\gamma y_{t-1}+\varepsilon_t$ 和 $\Delta y_t=b+\gamma y_{t-1}+\varepsilon_t$。参考文献[12,13]，仿真次数都取50000次，得到1%、2.5%、5%、10%、90%、95%、97.5%、99%的分位数，即对应分位点的临界值。

经仿真得到了上述四种情形下F统计量的临界值，具体在表1中给出。当T趋近于∞时，渐近分布的临界值可参考文献[12]。

表1　高次趋势DF单位根检验中联合F检验统计量分布的临界值

检验式类型	样本容量	高次趋势DF单位根检验中F统计量大于下列数字的概率					
		0.99	0.95	0.90	0.10	0.05	0.01
带三次趋势项	10	1.53	1.96	2.33	14.28	20.51	46.29
	20	1.66	2.23	2.64	9.89	11.99	17.58
	30	1.73	2.30	2.72	9.06	10.76	14.77
	40	1.74	2.35	2.76	8.79	10.34	13.87
	50	1.76	2.35	2.76	8.67	10.10	13.33
	100	1.78	2.38	2.80	8.35	9.61	12.50
	200	1.80	2.43	2.85	8.18	9.34	11.83
	300	1.77	2.41	2.83	8.16	9.29	11.76
	500	1.79	2.44	2.85	8.13	9.26	11.75
带二次趋势项	10	1.11	1.49	1.79	10.48	14.54	29.87
	20	1.19	1.65	1.97	7.91	9.77	14.47
	30	1.23	1.69	2.02	7.45	8.97	12.54
	40	1.22	1.71	2.05	7.23	8.62	11.70
	50	1.25	1.73	2.07	7.16	8.42	11.36
	100	1.27	1.76	2.09	6.96	8.08	10.63
	200	1.26	1.76	2.10	6.82	7.86	10.21
	300	1.26	1.76	2.10	6.84	7.91	10.30
	500	1.25	1.77	2.10	6.77	7.81	10.06
带线性趋势项	10	0.69	0.98	1.21	7.60	10.33	19.88
	20	0.73	1.07	1.32	6.18	7.61	11.33
	30	0.74	1.10	1.35	5.83	7.12	10.34
	40	0.76	1.11	1.37	5.67	6.85	9.69
	50	0.75	1.10	1.36	5.59	6.69	9.15
	100	0.77	1.12	1.38	5.44	6.48	8.71
	200	0.77	1.13	1.39	5.40	6.35	8.51
	300	0.77	1.13	1.39	5.35	6.30	8.49
	500	0.77	1.14	1.39	5.39	6.35	8.44
带截距项	10	0.27	0.44	0.60	5.01	6.74	12.62
	20	0.29	0.48	0.64	4.25	5.42	8.44
	30	0.28	0.49	0.66	4.05	5.08	7.69
	40	0.29	0.49	0.66	3.98	4.95	7.20
	50	0.29	0.49	0.66	3.95	4.85	7.00
	100	0.29	0.50	0.66	3.84	4.71	6.63
	200	0.30	0.50	0.66	3.82	4.65	6.55
	300	0.29	0.50	0.67	3.80	4.63	6.51
	500	0.29	0.50	0.67	3.78	4.58	6.35

注：限于篇幅，表中只给出了部分结果。

2.2 仿真中的共线性

在对三次趋势DF单位根检验的联合F检验的仿真中，当T≥300时，由于检验式的自变量 X 中 t^3 与 y_{t-1} 之间存在多重共线性，从而导致估计时产生了矩阵 $X'X$ 接近奇异的问题，这会影响估计的精度。并且随着趋势项阶数的增加，t^3 与 y_{t-1} 之间的共线性程度会更加严重[13]。

2.3 仿真结果与文献[2]的比较

在带线性趋势项和截距项两种情形下，对本文与文献[2]中仿真的临界值进行了比较（图略）。结果发现，本文仿真的临界值与文献[2]仿真的临界值在趋势项阶数相同时很接近，尤其是在趋势项阶数更小、样本容量更大时，本文与文献[2]仿真的临界值就更接近。比如，T取25、50、100、250、500和趋近于∞，带线性趋势项时，本文5%的临界值分别为7.24、6.69、6.48、6.32、6.35，文献[2]中5%的临界值

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

分别为7.24、6.73、6.49、6.34、6.30；含截距项时，本文95%的临界值分别为0.48、0.49、0.50、0.51、0.50，文献[2]中95%的临界值分别为0.49、0.50、0.50、0.51、0.51。

2.4 仿真结果与文献[5]的比较

在带线性趋势项和截距项两种情形下，对本文与文献[5]的临界值进行了比较（图略）。结果发现，在带截距项检验时，本文的临界值与文献[5]的临界值非常接近，并且在趋势项阶数更小、样本容量更大时，本文与文献[5]的临界值就更接近。比如，T取10、20、30、40、50、100、250和500，带截距项时，本文5%的临界值分别为6.74、5.42、5.08、4.95、4.85、4.71、4.60、4.58，文献[5]中5%的临界值分别为6.503、5.401、5.064、4.967、4.848、4.716、4.658、4.63；本文90%的临界值分别为0.60、0.64、0.66、0.66、0.66、0.66、0.67、0.67，文献[5]90%的临界值分别为0.61、0.642、0.646、0.652、0.658、0.666、0.673、0.671。带线性趋势项时，本文5%的临界值分别为10.33、7.61、7.12、6.85、6.69、6.48、6.32、6.35，文献[5]中5%的临界值分别为12.44、8.904、8.205、7.981、7.705、7.351、7.122、7.071；本文90%的临界值分别为1.21、1.32、1.35、1.37、1.36、1.38、1.40、1.39，文献[5]中90%的临界值分别为1.581、1.638、1.655、1.673、1.685、1.698、1.691、1.707。然而，在带线性趋势项检验时，本文的临界值与文献[5]的临界值有差别，本文的90%~99%以及1%~10%临界值一般更小，统计量的分布向左平移；并且，样本容量越大，本文与文献[5]的左侧临界值并没有表现出越接近的特征，而右侧临界值则表现出越来越接近的特征。比如，T取10、20、30、40、50、100、250和500，带线性趋势项时，本文10%的临界值分别为7.60、6.18、5.83、5.67、5.59、5.44、5.38、5.39，文献[5]中10%的临界值分别为9.256、7.233、6.805、6.612、6.465、6.248、6.114、6.09；本文95%的临界值分别为0.98、1.07、1.10、1.11、1.10、1.12、1.13、1.14，文献[5]中95%的临界值分别为1.265、1.327、1.34、1.362、1.369、1.379、1.39、1.389。出现这种现象的原因是：文献[5]中带线性趋势项的检验式与文献[2]对应检验式存在差别，而本文的检验式与文献[2]相同，故与文献[5]存在差异。

3 仿真结果分析

3.1 小样本和有限样本临界值与渐近临界值的比较

本文在带三次、二次、线性趋势项和截距项四种情形下，对不同T对应的联合F检验的临界值进行了比较（图略）。结果发现，相比渐近分布而言，联合F检验统计量在小样本和有限样本下90%~99%的临界值一般更小，而1%~10%的临界值则更大。比如，T取10、20、30、40、50、100、200、300、500和趋近于∞，带三次趋势项时，本文5%的临界值分别为20.51、11.99、10.76、10.34、10.10、9.61、9.34、9.29、9.26、9.08；带二次趋势项时，本文10%的临界值分别为10.48、7.91、7.45、7.23、7.16、6.96、6.82、6.84、6.77、6.69；带线性趋势项时，本文90%的临界值分别为1.21、1.32、1.35、1.37、1.36、1.38、1.39、1.39、1.39、1.39；带截距项时，本文95%的临界值分别为0.44、0.48、0.49、0.49、0.49、0.50、0.50、0.50、0.50、0.51。不难看出，统计量小样本和有限样本分布比渐近分布向两侧延伸得更多，即相比渐近分布，联合F检验统计量的小样本和有限样本分布更分散。文献[2]的研究结果也显示出这一点。

3.2 随着样本容量的增加，统计量临界值的变化

通过比较还可以发现，第一，趋势项阶数相同时，样本容量越小，对应90%~99%的临界值越小，而1%~10%的临界值则越大。比如，T取10、20、30、40、50、100、200、300、500和趋近于∞，带线性趋势项时，本文5%的临界值分别为10.33、7.61、7.12、6.85、6.69、6.48、6.35、6.30、6.35、6.24；带截距项时，本文10%的临界值分别为5.01、4.25、4.05、3.98、3.95、3.84、3.82、3.80、3.78、3.79。带二次趋势项时，本文90%的临界值分别为1.79、1.97、2.02、2.05、2.07、2.09、2.10、2.10、2.10、2.11；带三次趋势项时，本文95%的临界值分别为1.96、2.23、2.30、2.35、2.35、2.38、2.43、2.41、2.44、2.40。可见，随着样本容量的减小，统计量的分布更加分散。第二，趋势项阶数相同时，样本容量越大，对应90%~99%的临界值越大，而1%~10%的临界值则越小，并且随着样本容量的增大，对应的临界值更接近，且都与渐近分布对应临界值更接近。可见，随着样本容量的增加，统计量小样本和有限样本分布逐步向渐近分布靠近。文献[2]和文献[5]仿真得到的临界值也显示出同样的特征。第三，趋势项阶数相同时，如果T≥250，对应的临界值与渐近分布已经十分靠近，大部分90%~99%的临界值甚至大于渐近分布对应临界值，只有极个别1%~10%的临界值小于渐近分布对应的临界值。比如，T取250、300、500和趋近于∞，带二次趋势项时，本文5%的临界值分别为7.91、7.91、7.81、7.74；带截距项时，本文10%的临界值分别为3.80、3.80、3.78、3.79；带线性趋势项时，本文90%的临界值分别为1.40、1.39、1.39、1.39；带三次趋势项时，本文95%的临界值分别为2.41、2.41、2.44、2.40。可见，当样本容量较大时，有的有限样本分布的左侧临界值甚至比渐近分布的左侧临界值更大，即出现了更大的左侧临界值。文献[2]中仿真的临界值也显示出了这一特点。

3.3 随着趋势项阶数的增大，统计量分布的变动规律

当趋势项阶数增加时，为了分析DF单位根检验中联合F检验统计量的临界值的变动规律，下页图1至图8分别给出了四种类型的联合F检验在不同T时临界值的图形。可以发现：第一，趋势项阶数越大，90%~99%的临界值和1%~10%的临界值也都越大，反之亦然。可见，随着趋势项阶数的增加，F统计量的小样本、有限样本和渐近分布都向右发生平移。文献[2]和文献[5]的研究结果也显示出了这一特点。第二，随着趋势项阶数的增加，不同趋势项阶数、相同样本容量和相同分位点对应的左侧临界值的大小间隔在图形上并没有显示出太大变化。但从具体数值来看（见表1），99%临界值的大小间隔大部分都在增大；97.5%和95%临界值的大小间隔也由原来的小样本减小、有限样本增大，转变为大部分都增大；90%临界值由原来

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

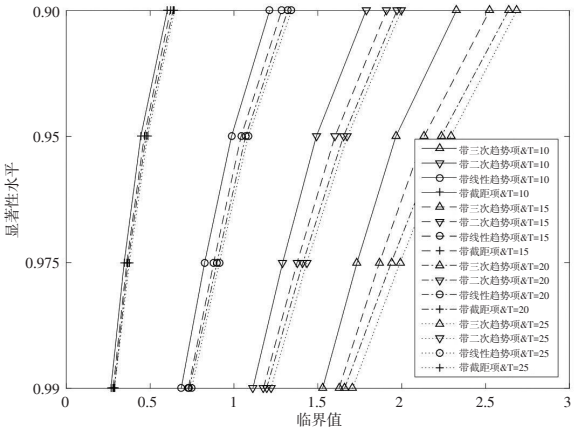

图1 T=10、15、20、25的左侧临界值

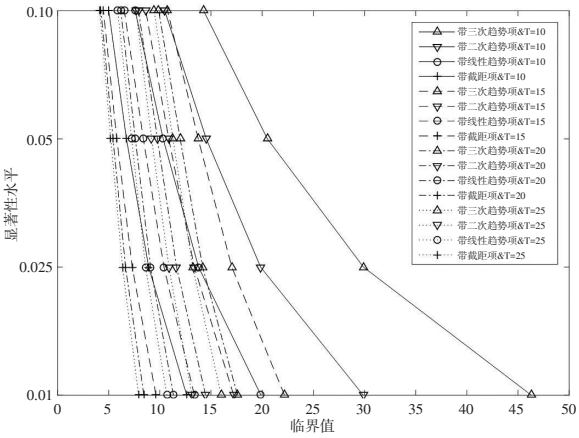

图2 T=10、15、20、25的右侧临界值

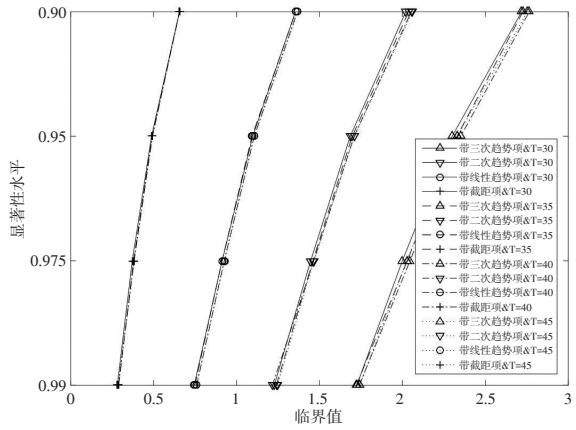

图3 T=30、35、40、45的左侧临界值

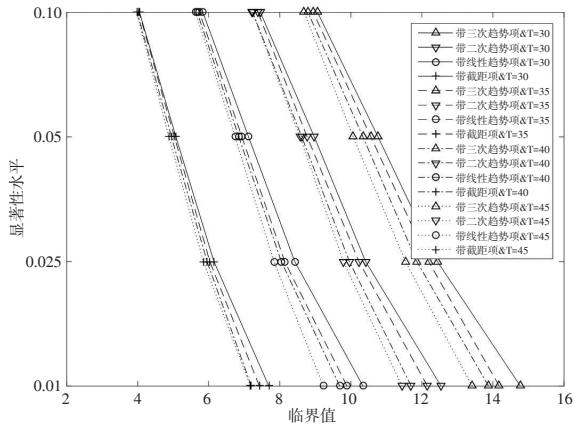

图4 T=30、35、40、45的右侧临界值

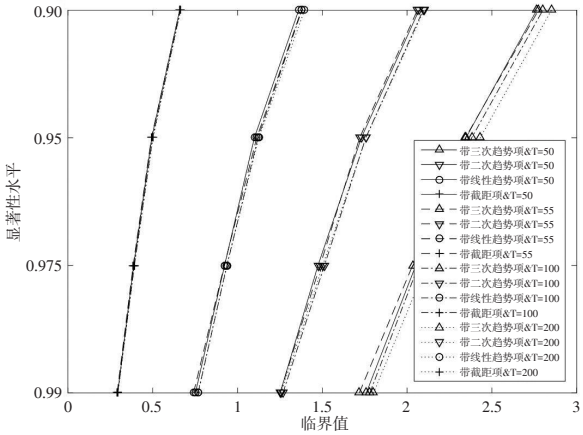

图5 T=50、55、100、200的左侧临界值

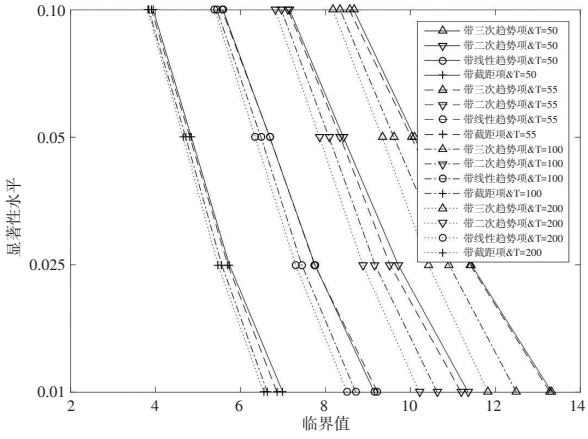

图6 T=50、55、100、200的右侧临界值

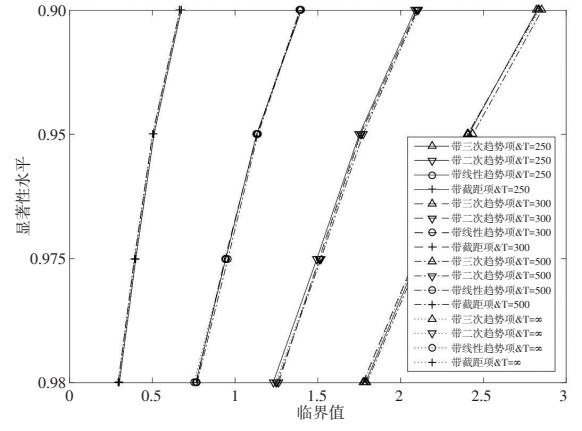

图7 T=250、300、500以及趋近于∞的左侧临界值

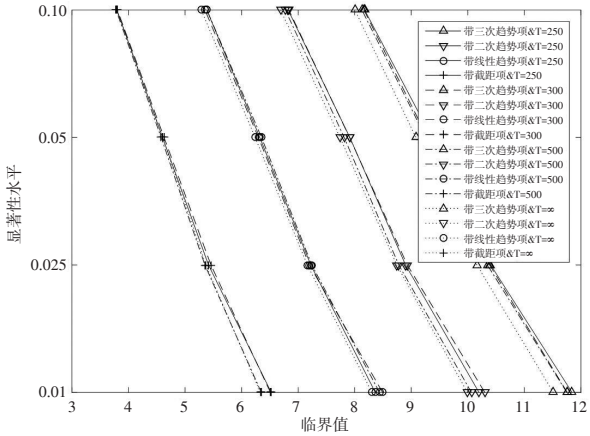

图8 T=250、300、500以及趋近于∞的右侧临界值

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的大部分减小，转变为大部分增大。随着趋势项阶数的增加，不同趋势项阶数、相同样本容量和分位点的右侧临界值的大小间隔在T≤30时先减小后增大，在T>30时大部分都减小。可见，趋势项阶数越大，F统计量的小样本分布、有限样本分布和渐近分布的左侧临界值向右移动的幅度越大，但并不明显，而右侧临界值向右平移的幅度则是在小样本时增大，在大样本时减小。第三，趋势项阶数越小，样本容量越大，不同样本容量、相同趋势项阶数和相同分位点对应的左侧和右侧临界值都越接近。这说明了趋势项阶数越小，F统计量的小样本、有限样本和渐近分布越接近，以及上文得出的F统计量的分布随着样本容量的增加而更加集中的结果。

4 结论

本文对高次趋势DF单位根检验中联合F检验的临界值进行仿真，比较了其与现有研究结果的联系与区别，并对其随样本容量和趋势项阶数改变的变化特征进行了分析。得出以下结论：

（1）本文仿真得到的临界值与文献[2]仿真的临界值非常接近；与文献[5]的临界值在线性趋势下向左平移，在截距项情形下非常接近。

（2）相比渐近分布情形，F检验统计量在小样本和有限样本下的分布更分散。样本容量越小，统计量的分布就越分散。样本容量越大，统计量的分布就越集中，且与渐近分布越接近。因此，如果选取渐近临界值对小样本或有限样本序列进行检验，就更容易接受备择假设，拒绝原假设，即易将一个单位根误判为趋势项阶数更高的单位根、趋势项阶数相同或更低的平稳序列。

（3）随着趋势项阶数的增大，F统计量的小样本、有限样本和渐近分布都向右平移，其左侧临界值向右平移的幅度有所增大，在但并不明显，而右侧临界值向右平移的幅度则是在小样本时增大，在大样本时减小。趋势项阶数越小，F统计量的小样本、有限样本和渐近分布越接近。因此，如果采用传统带线性趋势项、截距项和无确定部分的单位根检验式对具有高次趋势特征的序列进行检验，就更容易接受备择假设，拒绝原假设，即易将一个单位根误判为趋势项阶数更高的单位根、趋势项阶数相同或更低的平稳序列。

（4）为了避免将一个单位根误判为趋势项阶数更高的单位根、趋势项阶数相同或更低的平稳序列，避免检验出现水平扭曲，在对带高次趋势项且样本容量有限的序列进行单位根检验中的联合F检验时，应该采用带对应高次趋势项阶数的单位根检验中的联合F检验所对应样本容量的临界值进行检验。

参考文献：

[1]Dickey D A, Fuller W A. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root [J].Journal of the American Statistical Association,1979,74(366).

[2]Dickey D A, Fuller W A. Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series With a Unit Root [J].Econometirca,1981,49(4).

[3]Hamilton J D. Time Series Analysis [M].Princeton: Princeton University Press,1994.

[4]张凌翔,张晓峒.单位根检验中的Wald统计量研究[J].数量经济技术经济研究,2009,26(7).

[5]朱永军.DF检验式中联合检验F统计量分布特征[J].数量经济技术经济研究,2006,(7).

[6]刘田.ADF与PP单位根检验法对非线性趋势平稳序列的伪检验[J].数量经济技术经济研究,2008,(6).

[7]张晓峒,白仲林.退势单位根检验小样本性质的比较[J].数量经济技术经济研究,2005,(5).

[8]胡少东,李非.台湾GDP序列结构突变与经济周期[J].台湾研究集刊,2009,(3).

[9]段鹏,张晓峒.基于OLS退势的单位根检验[J].系统工程理论与实践,2010,30(5).

[10]叶宗裕.ADF单位根检验法的替代方法[J].数量经济技术经济研究,2017,34(6).

[11]Busetti F, Taylor R. Variance Shifts, Structural Breaks, and Stationarity Tests [J].Journal of Business & Economic Statistics,2003,21(4).

[12]左秀霞.带高次趋势项的ADF单位根检验[J].数量经济技术经济研究, 2019,36(1).

[13]左秀霞.高次趋势单位根检验的小样本和有限样本分布[J].统计与决策,2020,(20).

（责任编辑/刘柳青）

Study on Joint F Statistics in Unit Root Test With High-order Trend

Zuo Xiuxia

(School of Finance & Economics, Jiangsu University, Zhenjiang Jiangsu 212013, China)

Abstract: This paper simulates the critical values of joint F-test statistics in DF unit root test with high-order trend term under small and limited samples, and then compares its difference and connection with the existing research results. Finally, the paper discusses its variation characteristics with the increase of sample size and trend term order. The results show that the critical value obtained by the simulation is very similar to the existing results, that compared with its asymptotic distribution, the distributions of statistics in small and limited samples are more dispersed, and the smaller the sample size, the greater the dispersion, and that the larger the trend term order is, the more the distributions of statistics shift to the right, but when the sample size is greater than 30, the shift amplitude of the right critical values to the right gradually decreases.

Key words: high-order trend; unit root test; F statistics; critical value

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net